LA MESURE EN MECANIQUE QUANTIQUE

I-/ On considère le mouvement d'une particule sans spin régi par un Hamiltonien $\hat{\mathrm{H}}$. On suppose connue l'équation aux valeurs propres de $\hat{\mathrm{H}}$:

$$\hat{\mathrm{H}}|n_1, n_2\rangle = \left(n_1^2 + n_2^2\right)|n_1, n_2\rangle \quad \text{avec : } \langle n'_1, n'_2 | n_1, n_2\rangle = \delta_{n_1,n_2}\delta_{n'_1,n'_2}$$

Où n_1 et n_2 sont des entiers positifs.
On suppose qu'à l'instant $t = 0$ la particule est dans l'état normalisé à l'unité :

$$|\psi(t=0)\rangle = a|1,1\rangle + b|1,2\rangle$$

Où a et b sont des constantes réelles positives.

1-/ Déterminer a et b sachant que la valeur moyenne de l'énergie à l'instant $t = 0$ est 3.

2-/ Déterminer l'état $|\psi(t)\rangle$ de la particule à un instant $t > 0$.

3-/ Soient $\hat{\mathrm{A}}$ et $\hat{\mathrm{B}}$ deux observables de la particule telles que : $\begin{cases} \hat{\mathrm{A}}|n_1, n_2\rangle = n_1|n_1, n_2\rangle \\ \hat{\mathrm{B}}|n_1, n_2\rangle = n_2|n_1, n_2\rangle \end{cases}$

Quelles sont, à un instant $t > 0$, les valeurs possibles des résultats de mesures de A et B et leurs probabilités respectives ?

II-/ On considère un système physique S dont une grandeur P_1 est représenté dans une base orthonormée $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ par la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{3} & 0 \\ \sqrt{3} & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1-/ On mesure P_1, quelles valeurs peut-on trouver ?
2-/ Si l'on prépare le système S dans l'état $|\psi_1\rangle$, qu'obtient-on comme résultat de mesure et avec quelle probabilité ?
3-/ Une seconde grandeur P_2 du système S est représentée dans la même base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ par la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

On mesure P_2, quelles valeurs peut-on obtenir ?
4-/ On mesure P_1 , dans quel état se trouve le système ? On mesure ensuite P_2, qu'obtient-on suivant le résultat de mesure de P_1 ?
5-/ On mesure P_2 , dans quel état se trouve le système ? On mesure ensuite P_1, qu'obtient-on suivant le résultat de mesure de P_2 ?

6-/ On considère une troisième grandeur P_3 représentée dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ par la matrice

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \\ -1 & \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

On mesure P_3, qu'obtient-on ? Dans quels états se trouve le système ?
Puis on mesure P_2, qu'obtient-on ?

7-/ On mesure P_3 puis P_1, qu'obtient-on ?

8-/ On mesure P_3, quelle est la valeur moyenne de P_1 dans chacun des états possibles du système ?

9-/ On considère une 4ème grandeur P_4 représentée dans la base $\{|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, |\psi_3\rangle\}$ par la matrice

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Peut-on mesurer P_4 ?

Les outils...



1-/ Description de l'état d'un système :

A un instant donné t_0 fixé, l'état d'un système est défini par la donnée d'un ket $\left|\psi(t_0)\right\rangle$ appartenant à l'espace des états E.

Remarque : *E* étant un espace vectoriel, ce postulat implique un **principe de superposition** : une combinaison linéaire de vecteurs d'état est un vecteur d'état.

2-/ Description des grandeurs physiques :

Toute grandeur physique mesurable A est décrite par un opérateur $\hat{A}$ agissant dans E ; cet opérateur est une ***observable.***

3-/ Mesure des grandeurs physiques :

a) résultats possibles

La mesure d'une grandeur physique A ne peut donner comme résultat qu'une des valeurs propres de l'observable $\hat{A}$ correspondante.

Remarque : une mesure de A donnera toujours une valeur réelle puisque $\hat{A}$ est par définition **hermitique.**

b) principe de décomposition spectrale

b-1) cas d'un spectre discret non dégénéré :

Lorsqu'on mesure la grandeur physique A sur un système dans l'état $\left|\psi\right\rangle$ ***normé,*** *la probabilité $P(a_n)$ d'obtenir comme résultat la valeur propre* ***non dégénérée*** *a_n de l'observable $\hat{A}$ correspondante est : $P(a_n) = \left|\left\langle u_n \middle| \psi\right\rangle\right|^2$ où $\left|u_n\right\rangle$ est le vecteur propre normé de $\hat{A}$ associé à la valeur propre a_n.*

b-2) cas où a_n est dégénérée : *(de degré de dégénérescence g_n)*

$P(a_n) = \sum_{i=1}^{g_n} \left|\left\langle u_n^i \middle| \psi\right\rangle\right|^2$ où $\left\{\left|u_n^i\right\rangle\right\}$ $(i = 1 \ldots g_n)$ est un système orthonormé de vecteurs formant une base dans le sous-espace propre E_n associé à la valeur propre a_n.

b-3) cas d'un spectre continu non dégénéré :

La probabilité $dP(\alpha)$ d'obtenir un résultat compris entre α et $\alpha + d\alpha$ vaut :
$dP(\alpha) = \left|\left\langle v_\alpha \middle| \psi\right\rangle\right|^2 d\alpha$ où $\left|v_\alpha\right\rangle$ est le vecteur propre correspondant à la valeur propre α de l'observable $\hat{A}$ associée à A.

4-/ Réduction du paquet d'ondes :

Si la mesure de la grandeur physique A *sur le système dans l'état* $|\psi\rangle$ *donne le résultat* a_n, *l'état du système immédiatement après la mesure est la projection normée* $\frac{\hat{P}_n|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_n|\psi\rangle}}$ de $|\psi\rangle$ *sur le sous espace propre associé à* a_n.

5-/ Evolution dans le temps :

L'évolution dans le temps du vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ *est régie par l'équation de Schrödinger :*

$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi(t)\rangle = \hat{H}(t)|\psi(t)\rangle$ *où* $\hat{H}(t)$ *est l'observable associée à l'énergie totale du système.*

6-/ Règles de quantification :

Pour une particule sans spin soumise à un potentiel scalaire :

* *à la position* $\vec{r}(x,y,z)$ *de la particule est associée l'observable* $\hat{\vec{R}}(\hat{X},\hat{Y},\hat{Z})$

* *à l'impulsion* $\vec{p}(p_x,p_y,p_z)$ *de la particule est associée l'observable* $\hat{\vec{P}}(\hat{P}_X,\hat{P}_Y,\hat{P}_Z)$

telles que : $\begin{cases}\left[\hat{R}_i,\hat{R}_j\right] = \left[\hat{P}_i,\hat{P}_j\right] = 0 \\ \left[\hat{R}_i,\hat{P}_j\right] = i\hbar\delta_{ij}\end{cases}$

L'observable $\hat{A}$ *qui décrit une grandeur physique A définie classiquement, s'obtient en remplaçant dans l'expression convenablement symétrisée de A,* $\vec{r}$ et $\vec{p}$ *par les observables* $\hat{\vec{R}}$ et $\hat{\vec{P}}$ *respectivement.*

7-/ Principe de superposition et prévisions physiques :

a) Soient $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ deux états normés et orthogonaux : $\begin{cases}\langle\psi_1|\psi_1\rangle = \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1 \\ \langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0\end{cases}$

$|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ sont par exemple deux états propres d'une même observable $\hat{B}$ associés à deux valeurs propres différentes b_1 et b_2.
Considérons un état normé $|\psi\rangle$, superposition linéaire de $|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$: $|\psi\rangle = \lambda_1|\psi_1\rangle + \lambda_2|\psi_2\rangle$ $\left(|\lambda_1|^2 + |\lambda_2|^2 = 1\right)$; alors la probabilité de trouver b_1 lors d'une mesure de *B* est $|\lambda_1|^2$, celle de trouver b_2 est $|\lambda_2|^2$.

b) Si deux observables $\hat{A}$ et $\hat{B}$ (correspondant à deux grandeurs physiques *A* et *B*) **commutent**

$\left[\hat{A},\hat{B}\right] = 0$ alors $\exists$ une base commune $\{|\psi_n\rangle\}$, soit : $\begin{cases}\hat{A}|\psi_n\rangle = \alpha_n|\psi_n\rangle \\ \hat{B}|\psi_n\rangle = \beta_n|\psi_n\rangle\end{cases}$

Pour prédire les résultats de mesure de *A* et *B*, **on développe l'état** $|\psi\rangle$ **du système sur la base** $\{|\psi_n\rangle\}$ des états propres communs à $\hat{A}$ et $\hat{B}$: $|\psi\rangle = \sum_n a_n|\psi_n\rangle$.

Si mesure$(A) \to \alpha_i$ avec la probabilité $|a_i|^2$, le système immédiatement après la mesure est dans l'état $|\psi_i\rangle$, état propre de $\hat{B}$. La mesure de B donnera donc β_i avec la probabilité $|a_i|^2$ **et réciproquement.**
⇒ la prédiction des résultats de mesures est alors indépendante de l'ordre des mesures.

c) Si $\left[\hat{A},\hat{B}\right] \neq 0$

Il faut alors décomposer l'état $|\psi\rangle$ du système sur la base des vecteurs propres de $\hat{A}$ ou $\hat{B}$ selon que l'on mesure d'abord A ou B.

$$\begin{cases} \hat{A}|\psi_n\rangle = \alpha_n|\psi_n\rangle \\ \hat{B}|\Phi_n\rangle = \beta_n|\Phi_n\rangle \end{cases} \quad \text{et} \quad |\psi\rangle = \sum_n a_n|\psi_n\rangle = \sum_n b_n|\Phi_n\rangle$$

Si mesure$(A) \to \alpha_i$ avec la probabilité $|a_i|^2$, le système immédiatement après la mesure est dans l'état $|\psi_i\rangle$. Comme $|\psi_i\rangle$ n'est pas un vecteur propre de $\hat{B}$, il faut décomposer $|\psi_i\rangle$ sur la base $\{|\Phi_n\rangle\}$, soit : $|\psi_i\rangle = \sum_n c_n|\Phi_n\rangle$. La mesure de B donnera donc β_i avec la probabilité $|c_i|^2$ et le système, immédiatement après la mesure sera dans l'état $|\Phi_i\rangle$. Si on mesure à nouveau A, il faudra de nouveau décomposer $|\Phi_i\rangle$ sur la base $\{|\psi_n\rangle\}$.
⇒ La prédiction des résultats de mesures est donc dépendante cette fois de l'ordre des mesures.

d) E.C.O.C.
On appelle « Ensemble Complet d'Observables qui Commutent » un ensemble minimal d'observables qui commutent deux à deux et tel que la donnée d'un jeux de leurs valeurs propres suffit à déterminer sans ambiguïté un vecteur propre unique de leur base commune de vecteurs propres.

Corrigé

I-/

1-/ valeur moyenne de l'énergie : $\langle\psi(t=0)|\hat{\mathrm{H}}|\psi(\mathrm{t=0})\rangle$

or $\hat{\mathrm{H}}|\psi(\mathrm{t=0})\rangle = \hat{\mathrm{H}}\left(a|1,1\rangle + b|1,2\rangle\right) = a\left(1^2+1^2\right)|1,1\rangle + b\left(1^2+2^2\right)|1,2\rangle$

d'où : $\langle\psi(t=0)|\hat{\mathrm{H}}|\psi(\mathrm{t=0})\rangle = 2a^2 + 5b^2 = 3 \quad (1)$

d'autre part, $|\psi(t=0)\rangle$ est normé à l'unité : $\langle\psi(t=0)|\psi(t=0)\rangle = 1 = a^2 + b^2 \quad (2)$

(1) et (2) $\Rightarrow \begin{cases} a = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ b = \sqrt{\frac{1}{3}} \end{cases}$ d'où $|\psi(t=0)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}|1,2\rangle \quad (3)$

2-/ $|1,1\rangle$ est état propre de $\hat{\mathrm{H}}$ avec la valeur propre 2 ; $|1,2\rangle$ est état propre de $\hat{\mathrm{H}}$ avec la valeur propre 5. D'autre part $\hat{\mathrm{H}}$ est indépendant du temps.

Par conséquent (3)$\Rightarrow |\psi(t)\rangle = \sqrt{\frac{2}{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}2t}|1,1\rangle + \sqrt{\frac{1}{3}}e^{-\frac{i}{\hbar}5t}|1,2\rangle \quad (4)$

3-/ $|1,1\rangle$ et $|1,2\rangle$ sont états propres de $\hat{\mathrm{A}}$ avec la valeur propre 1, par conséquent la mesure de A au temps t donnera 1 comme résultat, avec la probabilité :

$\left|\langle\psi(t)|1,1\rangle\right|^2 + \left|\langle\psi(t)|1,2\rangle\right|^2 = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 1$

$|1,1\rangle$ est état propre de $\hat{\mathrm{B}}$ avec la valeur propre 1, par conséquent la mesure de B au temps t donnera 1 comme résultat, avec la probabilité : $\left|\langle\psi(t)|1,1\rangle\right|^2 = \frac{2}{3}$

$|1,2\rangle$ est état propre de $\hat{\mathrm{B}}$ avec la valeur propre 2, par conséquent la mesure de B au temps t donnera 2 comme résultat, avec la probabilité : $\left|\langle\psi(t)|1,2\rangle\right|^2 = \frac{1}{3}$

II-/

1-/ Le résultat d'une mesure de P_1 est nécessairement une des valeurs propres de la matrice A soit : -3 ou 1

2-/ Les vecteurs propres normés de A sont : (notations évidentes) :

$$\begin{cases} |a_1\rangle = |\psi_3\rangle \\ |a'_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\psi_1\rangle + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle \\ |a_{-3}\rangle = -\frac{1}{2}|\psi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|\psi_2\rangle \end{cases}$$

On prépare le système S dans l'état $|\psi_1\rangle$, qui n'est pas état propre de P_1.

On développe $|\psi_1\rangle$ sur la base des états propres de P_1 :

$$|\psi_1\rangle = \underbrace{\langle a_1|\psi_1\rangle}_{=0} |a_1\rangle + \underbrace{\langle a'_1|\psi_1\rangle}_{=\frac{\sqrt{3}}{2}} |a'_1\rangle + \underbrace{\langle a_{-3}|\psi_1\rangle}_{=-\frac{1}{2}} |a_{-3}\rangle \text{ soit :}$$

$$|\psi_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|a'_1\rangle - \frac{1}{2}|a_{-3}\rangle$$

Le système S étant préparé dans l'état $|\psi_1\rangle$, la mesure de P_1 donnera :

$$\begin{cases} 1 \text{ avec la probabilité } \dfrac{3}{4} \\ -3 \text{ avec la probabilité } \dfrac{1}{4} \end{cases}$$

3-/ De même une mesure de P_2 donnera 1 ou -1, valeurs propres de la matrice hermitique B.

Les vecteurs propres normés correspondants étant : (notations évidentes) :

$$\begin{cases} |b_1\rangle = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\psi_1\rangle + \dfrac{1}{2}|\psi_2\rangle \\ |b_{-1}\rangle = |\psi_3\rangle \\ |b'_{-1}\rangle = -\dfrac{1}{2}|\psi_1\rangle + \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\psi_2\rangle \end{cases}$$

4-/ On mesure P_1 : **supposons que la mesure ait donné 1 comme résultat**. Immédiatement après la mesure, le système S se trouve nécessairement dans un état appartenant au sous-espace de dégénérescence de la valeur propre 1, sous-tendu par les deux vecteurs de base $|a_1\rangle = |\psi_3\rangle = |b_{-1}\rangle$ et $|a'_1\rangle = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\psi_1\rangle + \dfrac{1}{2}|\psi_2\rangle = |b_1\rangle$ (d'après le théorème de projection).

Toute combinaison linéaire normée $\alpha|b_{-1}\rangle + \beta|b_1\rangle \quad (\alpha^2 + \beta^2 = 1)$ est donc un état possible du système S.

$|b_{-1}\rangle$ et $|b_1\rangle$ étant états propres de P_2, une mesure de P_2 donnera comme résultat :

$$\begin{cases} -1 \text{ avec la probabilité } \alpha^2 \\ 1 \text{ avec la probabilité } \beta^2 \end{cases}$$

supposons maintenant que la mesure de P_1 ait donné -3 comme résultat.

Le système S se trouve alors dans l'état $|a_{-3}\rangle = -\dfrac{1}{2}|\psi_1\rangle + \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\psi_2\rangle = |b'_{-1}\rangle$, état propre de P_2.

La mesure de P_2 donnera donc **-1 avec certitude.**

5-/ On mesure maintenant P_2. On peut donc trouver :

- soit 1 et le système se trouve alors dans l'état $|b_1\rangle = \dfrac{\sqrt{3}}{2}|\psi_1\rangle + \dfrac{1}{2}|\psi_2\rangle = |a'_1\rangle$
- soit -1 et l'état normé du système est alors $\gamma|b_{-1}\rangle + \delta|b'_{-1}\rangle = \gamma|a_1\rangle + \delta|a_{-3}\rangle \quad (\gamma^2 + \delta^2 = 1)$

Dans le premier cas la mesure de P_1 donnera 1 avec certitude.

Dans le second cas la mesure de P_1 donnera 1 avec la probabilité γ^2 ou –3 avec la probabilité δ^2.

6-/ Les valeurs propres de C étant –1, 3 et 1, une mesure de P_3 donnera –1, 3 et 1 comme résultats possibles.
Les états propres correspondants sont :

$$\begin{cases} |c_1\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2}|\psi_1\rangle + \frac{1}{2}|\psi_2\rangle = |b_1\rangle = |a'_1\rangle \\ |c_{-1}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|\psi_1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_3\rangle \\ |c_3\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_3\rangle \end{cases}$$

• Supposons que la mesure de P_3 ait donné 1 comme résultat. Le système est alors dans l'état $\boxed{|c_1\rangle = |b_1\rangle}$, état propre de P_2 correspondant à la valeur propre 1. Une mesure de P_2 donnera donc 1 avec certitude.

• Supposons que la mesure de P_3 ait donné -1 comme résultat. Le système est alors dans l'état

$|c_{-1}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|\psi_1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_3\rangle$. Développons $|c_1\rangle$ sur la base des états propres de P_2

$$|c_{-1}\rangle = |b_1\rangle \underbrace{\langle b_1|c_{-1}\rangle}_{0} + |b_{-1}\rangle \underbrace{\langle b_{-1}|c_{-1}\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + |b'_{-1}\rangle \underbrace{\langle b'_{-1}|c_{-1}\rangle}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{|c_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b_{-1}\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|b'_{-1}\rangle}$$

Une mesure de P_2 donnera donc : -1 avec la probabilité $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$

• Supposons que la mesure de P_3 ait donné 3 comme résultat. Le système est alors dans l'état

$|c_3\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_3\rangle$. Développons $|c_3\rangle$ sur la base des états propres de P_2

$$|c_3\rangle = |b_1\rangle \underbrace{\langle b_1|c_3\rangle}_{0} + |b_{-1}\rangle \underbrace{\langle b_{-1}|c_3\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + |b'_{-1}\rangle \underbrace{\langle b'_{-1}|c_3\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{|c_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|b_{-1}\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|b'_{-1}\rangle}$$

Une mesure de P_2 donnera donc : -1 avec certitude.

7-/

• Supposons que la mesure de P_3 ait donné +1 comme résultat. Le système est alors dans l'état $\boxed{|c_1\rangle = |a'_1\rangle}$, état propre de P_1 correspondant à la valeur propre 1. Une mesure de P_1 donnera donc 1 avec certitude.

• Supposons que la mesure de P_3 ait donné -1 comme résultat. Le système est alors dans l'état

$|c_{-1}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}}|\psi_1\rangle - \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_3\rangle$. Développons $|c_{-1}\rangle$ sur la base des états propres de P_1

$$|c_{-1}\rangle = |a_1\rangle\underbrace{\langle a_1|c_{-1}\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + |a'_1\rangle\underbrace{\langle a'_1|c_{-1}\rangle}_{0} + |a_{-3}\rangle\underbrace{\langle a_{-3}|c_{-1}\rangle}_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{|c_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|a_{-3}\rangle}$$

Une mesure de P_1 donnera donc : 1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou –3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$

- Supposons que la mesure de P_3 ait donné 3 comme résultat. Le système est alors dans l'état $|c_3\rangle = -\frac{1}{2\sqrt{2}}|\psi_1\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}|\psi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\psi_3\rangle$. Développons $|c_3\rangle$ sur la base des états propres de P_1

$$|c_3\rangle = |a_1\rangle\underbrace{\langle a_1|c_3\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}} + |a'_1\rangle\underbrace{\langle a'_1|c_3\rangle}_{0} + |a_{-3}\rangle\underbrace{\langle a_{-3}|c_3\rangle}_{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$\boxed{|c_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|a_{-3}\rangle}$$

Une mesure de P_1 donnera donc :1 avec la probabilité $\frac{1}{2}$ ou –3 avec la probabilité $\frac{1}{2}$.

8-/

- Supposons que la mesure de P_3 ait donné +1 comme résultat. Le système est alors dans l'état $|c_{-1}\rangle = |a'_1\rangle$, état propre de P_1 correspondant à la valeur propre 1.

La valeur moyenne de P_1 est alors : $\langle a'_1|A|a'_1\rangle = \langle a'_1|a'_1\rangle = 1$

- Supposons que la mesure de P_3 ait donné -1 comme résultat. Le système est alors dans l'état

$|c_{-1}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|a_{-3}\rangle$. La valeur moyenne de P_1 est alors : $\langle c_{-1}|\hat{A}|c_{-1}\rangle$, soit :

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle a_1| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle a_{-3}|\right)\hat{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle - \frac{1}{\sqrt{2}}|a_{-3}\rangle\right)$$
$$= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\langle a_1| - \frac{1}{\sqrt{2}}\langle a_{-3}|\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{3}{\sqrt{2}}|a_{-3}\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

- Supposons que la mesure de P_3 ait donné 3 comme résultat. Le système est alors dans l'état

$|c_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|a_{-3}\rangle$. La valeur moyenne de P_1 est alors : $\langle c_3|\hat{A}|c_3\rangle$, soit :

$$\frac{1}{2}\left(\langle a_1| + \langle a_{-3}|\right)\hat{A}\left(|a_1\rangle + |a_{-3}\rangle\right) = \frac{1}{2}\left(\langle a_1| + \langle a_{-3}|\right)\left(|a_1\rangle - 3|a_{-3}\rangle\right) = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

Remarque :

Les calculs précédents de $\langle P_1\rangle$ n'ont pour but que de manipuler la notion de valeur moyenne car les résultats étaient donnés par la question précédente où l'on a calculé les résultats de mesures de P_1 avec leur probabilités :

Résultat de mesure de P_1	Avec la probabilité	$\langle P_1 \rangle$
1	1	1x1=1
1 -3	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$1\text{x}\frac{1}{2}$ -3x$\frac{1}{2} = -1$
1 -3	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$	$1\text{x}\frac{1}{2}$ -3x$\frac{1}{2}$ = - 1

9-/ P_4 n'est pas une observable puisque la matrice D n'est pas hermitique.